

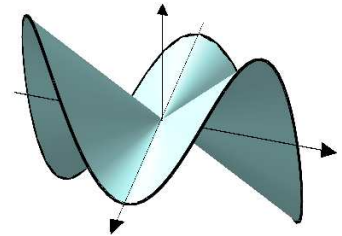
## Cálculo III

### Módulo 1   Lista 3   1.º/2015

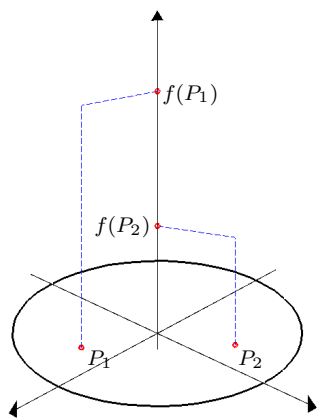
**Atenção:** na questão 1, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta no espaço ao lado do item e justificando a sua resposta.

1) Sejam  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  um ponto genérico,  $P_0 = (0, 0)$  e  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(P_0) = 0$  e  $f(P) = f(x, y) = y \frac{xy}{x^2 + y^2}$  para  $P \neq P_0$ . A figura abaixo ilustra o gráfico de  $f$ . Se necessário, use a desigualdade  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

- C  E   a) Dado uma margem de tolerância  $\epsilon > 0$ , basta escolher a margem de segurança  $\delta = 2\epsilon$  para se ter que  $|f(P) - f(P_0)| < \epsilon$  sempre que  $\|P - P_0\| < \delta$ .
- C  E   b) A função não possui as derivadas parciais  $f_x(P_0)$  e  $f_y(P_0)$ .
- C  E   c) A derivada direcional  $\frac{\partial}{\partial v} f(P_0)$  não existe para alguma direção  $v \in \mathbb{R}^2$ .
- C  E   d) O limite  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)/\|P\|$  não existe.
- C  E   e) A função  $f$  não é diferenciável em  $P_0$ .



2) Sabe-se que, para funções de uma variável, uma limitação na derivada implica em limitação da própria função. Para funções de duas variáveis, um fato semelhante pode ser mostrado como segue. Sejam  $R > 0$ ,  $D = \{P \in \mathbb{R}^2; \|P\| \leq R\}$  e  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável com  $|f_x(P)| \leq 6$  e  $|f_y(P)| \leq 8 \quad \forall P \in D$ . Dados  $P_1$  e  $P_2$  em  $D$ , considere o caminho  $P(t) = P_1 + t(P_2 - P_1)$  e a função  $g(t) = f(P(t))$ . Segundo o Teorema do Valor Médio, tem-se  $g(1) - g(0) = g'(c)$  para  $c \in (0, 1)$ . Se necessário, use que  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$ .



a) Obtenha uma constante  $K_0$  tal que  $\|\nabla f(P)\| \leq K_0$  para todo  $P \in D$ .

**Resposta:**

b) Obtenha a expressão de  $g(1) - g(0)$  em termos de  $f$  e dos pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

**Resposta:**

c) Obtenha a expressão da derivada  $g'(t)$  em termos das derivadas parciais de  $f$  e dos pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

**Resposta:**

d) Obtenha uma constante  $K_1$  tal que  $\|f(P_1) - f(P_2)\| \leq K_1 \|P_1 - P_2\| \quad \forall P_1, P_2 \in D$

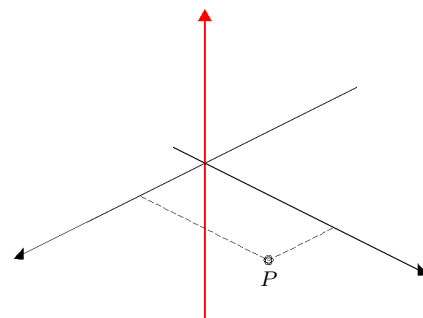
**Resposta:**

e) Obtenha agora uma constante  $L$  de modo que a imagem de  $f$  esteja contida em um intervalo de comprimento  $L$ .

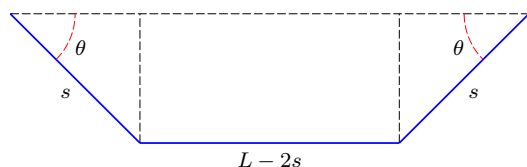
**Resposta:**

3) Considere uma distribuição de carga ao longo do eixo  $\mathcal{O}z$  com densidade constante  $\delta = 1$ . No domínio  $D = \{(x, y); y > 0\}$  e para  $K > 0$ , essa distribuição gera um potencial elétrico  $f(x, y) = -K \ln(x^2 + y^2)$  com campo correspondente  $E(x, y) = -\nabla f(x, y)$ . Suponha que uma partícula de massa  $m$  e carga 1 se desloca com trajetória  $P(t) = (x(t), y(t))$  sujeita apenas ao campo  $E$ . Nesse caso,  $E$  é a resultante das forças sobre a partícula e vale a lei de Newton  $E(P(t)) = mP''(t)$ . Com essa notação,  $\mathcal{E}(t) = (m/2)\|P'(t)\|^2 + f(P(t))$  é a energia total da partícula no tempo  $t$ .

- Calcule as derivadas  $f_x(P)$  e  $f_y(P)$ .
- Calcule a norma  $\|E(P)\|$  e o vetor unitário  $U(P)$  na direção e sentido do campo em um ponto genérico  $P = (x, y) \in D$ .
- Esboce o vetor  $U(P)$  e a curva de nível de  $f$  por um ponto genérico  $P \in D$ .
- Verifique que a energia total da partícula é conservada, isto é, que  $d\mathcal{E}(t)/dt \equiv 0$ .
- Use o item anterior para verifique que, se a partícula estiver se movendo sobre uma curva de nível de  $f$ , então  $\|P'(t)\|$  é constante.



4) Considere a situação em que uma calha deve ser fabricada a partir de uma chapa de metal de largura igual a  $L$  m. A figura abaixo ilustra uma seção transversal da calha, que é simétrica e com três lados retos. Observe que a área  $A$  da seção transversal é uma função  $A = A(s, \theta)$  das medidas  $s$  e  $\theta$  indicadas na figura, e o domínio dessa função é o conjunto  $D = [0, L/2] \times [0, \pi/2]$ . Como a vazão é proporcional à área da seção transversal, o problema consiste em escolher os valores de  $s$  e  $\theta$  que maximizam esta área.



- Obtenha a expressão da função  $A(s, \theta)$ .
- Esboce o bordo  $\partial D$  do domínio  $D$ .
- Determine o valor máximo de  $A(s, \theta)$  sobre o bordo  $\partial D$ .
- Calcule os pontos críticos de  $A(s, \theta)$  que são interiores a  $D$ .
- Determine agora os valores de  $s$  e  $\theta$  que maximizam a área da seção transversal.