Cálculo III

Módulo 1 – Gabaritos – Lista 3 1.º/2015

Atenção: na questão 1, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta no espaço ao lado do item e justificando a sua resposta.

1) Sejam $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ um ponto genérico, $P_0 = (0, 0)$ e $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(P_0) = 0$ e $f(P) = f(x, y) = y\dfrac{x\,y}{x^2 + y^2}$ para $P \neq P_0$. A figura abaixo ilustra o gráfico de f. Se necessário, use a desigualdade $|x\,y| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

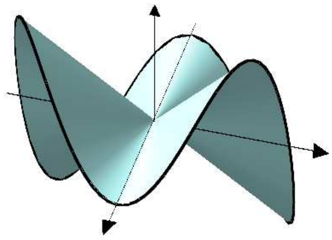
C E a) Dado uma margem de tolerância $\epsilon > 0$, basta escolher a margem de segurança $\delta = 2\epsilon$ para se ter que $|f(P) - f(P_0)| < \epsilon$ sempre que $\|P - P_0\| < \delta$.

C **E** b) A função não possui as derivadas parciais $f_x(P_0)$ e $f_y(P_0)$.

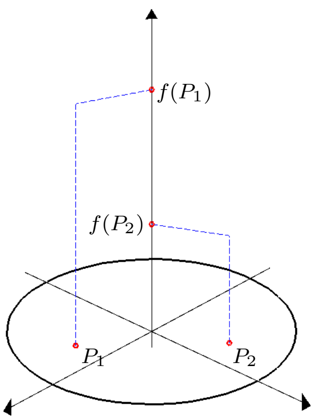
C **E** c) A derivada direcional $\frac{\partial}{\partial v} f(P_0)$ não existe para alguma direção $v \in \mathbb{R}^2$.

C E d) O limite $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)/\|P\|$ não existe.

C E e) A função f não é diferenciável em P_0.



2) Sabe-se que, para funções de uma variável, uma limitação na derivada implica em limitação da própria função. Para funções de duas variáveis, um fato semelhante pode ser mostrado como segue. Sejam $R > 0$, $D = \{P \in \mathbb{R}^2; \|P\| \leq R\}$ e $f\colon D \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com $|f_x(P)| \leq 6$ e $|f_y(P)| \leq 8 \quad \forall\ P \in D$. Dados P_1 e P_2 em D, considere o caminho $P(t) = P_1 + t(P_2 - P_1)$ e a função $g(t) = f(P(t))$. Segundo o Teorema do Valor Médio, tem-se $g(1) - g(0) = g'(c)$ para $c \in (0, 1)$. Se necessário, use que $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|\ \forall\ u, v \in \mathbb{R}^2$.



a) Obtenha uma constante K_0 tal que $\|\nabla f(P)\| \leq K_0$ para todo $P \in D$.

Resposta: $\|\nabla f(P)\| \leq \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

b) Obtenha a expressão de $g(1) - g(0)$ em termos de f e dos pontos P_1 e P_2.

Resposta: $g(1) - g(0) = f(P_2) - f(P_1)$

c) Obtenha a expressão da derivada $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f e dos pontos P_1 e P_2.

Resposta: $g'(t) = \langle \nabla f(P(t)), P_2 - P_1\rangle$

d) Obtenha uma constante K_1 tal que $\|f(P_1) - f(P_2)\| \leq K_1\|P_1 - P_2\|\ \forall\ P_1, P_2 \in D$

Resposta: $\|f(P_1) - f(P_2)\| \leq 10\|P_1 - P_2\|\ \forall\ P_1, P_2 \in D$

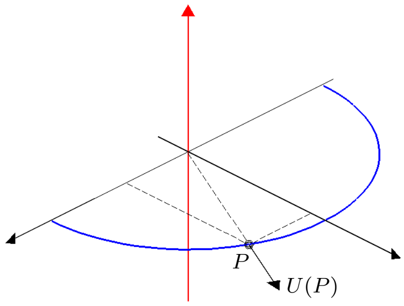
e) Obtenha agora uma constante L de modo que a imagem de f esteja contida em um intervalo de comprimento L.

Resposta: $\|f(P_1) - f(P_2)\| \leq 10\|P_1 - P_2\| \leq 10 \times 2r \forall\ P_1, P_2 \in D \Longrightarrow L = 20r$

3) Considere uma distribuição de carga ao longo do eixo $\mathcal{O}z$ com densidade constante $\delta = 1$. No domínio $D = \{(x, y); y > 0\}$ e para $K > 0$, essa distribuição gera um potencial elétrico $f(x, y) = -K\ln(x^2 + y^2)$ com campo correspondente $E(x, y) = -\nabla f(x, y)$. Suponha que uma partícula de massa m e carga 1 se desloca com trajetória $P(t) = (x(t), y(t))$ sujeita apenas ao campo E. Nesse caso, E é a resultante das forças sobre a partícula e vale a lei de Newton $E(P(t)) = mP''(t)$. Com essa notação, $\mathcal{E}(t) = (m/2)\|P'(t)\|^2 + f(P(t))$ é a energia total da partícula no tempo t.

a) Calcule as derivadas $f_x(P)$ e $f_y(P)$.

<u>**Resposta**</u>: $f_x(P) = \frac{-2Kx}{\|P\|^2}$ e $f_y(P) = \frac{-2Ky}{\|P\|^2}$.



b) Calcule a norma $\|E(P)\|$ e o vetor unitário $U(P)$ na direção e sentido do campo em um ponto genérico $P = (x, y) \in D$.

<u>**Resposta**</u>: $\|E(P)\| = \frac{2K}{\|P\|}$ e $U(P) = \frac{P}{\|P\|}$

c) Esboce o vetor $U(P)$ e a curva de nível de f por um ponto genérico $P \in D$.

<u>**Resposta**</u>: ver figura ao lado.

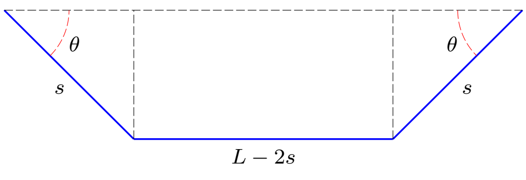
d) Verifique que a energia total da partícula é conservada, isto é, que $d\mathcal{E}(t)/dt \equiv 0$.

<u>**Resposta**</u>: $\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = \langle mP''(t) - F(P(t)), P'(t)\rangle = 0$.

e) Use o item anterior para verifique que, se a partícula estiver se movendo sobre uma curva de nível de f, então $\|P'(t)\|$ é constante.

<u>**Resposta**</u>: $\mathcal{E}(t)$ e $f(P(t))$ constantes $\Longrightarrow \|P'(t)\|$ também constante.

4) Considere a situação em que uma calha deve ser fabricada a partir de uma chapa de metal de largura igual a L m. A figura abaixo ilustra uma seção transversal da calha, que é simétrica e com três lados retos. Observe que a área A da seção transversal é uma função $A = A(s, \theta)$ das medidas s e θ indicadas na figura, e o domínio dessa função é o conjunto $D = [0, L/2] \times [0, \pi/2]$. Como a vazão é proporcional à área da seção transversal, o problema consiste em escolher os valores de s e θ que maximizam esta área.



a) Obtenha a expressão da função $A(s, \theta)$.

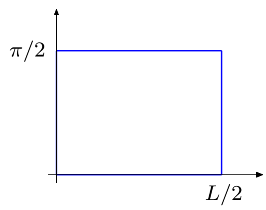
<u>**Resposta**</u>: $A(s, \theta) = s\,\text{sen}(\theta)(s\cos(\theta) + L - 2s)$.

b) Esboce o bordo ∂D do domínio D.

<u>**Resposta**</u>: ver figura abaixo.

c) Determine o valor máximo de $A(s, \theta)$ sobre o bordo ∂D.

<u>**Resposta**</u>: $A(s, \theta) \leq A(L/2, \pi/4) = L^2/8$.



d) Calcule os pontos críticos de $A(s, \theta)$ que são interiores a D.

<u>**Resposta**</u>: o único ponto crítico é $(L/3, \theta/3)$.

e) Determine agora os valores de s e θ que maximizam a área da seção transversal.

<u>**Resposta**</u>: $s = L/3$ e $\theta = \pi/3$.