

Cálculo III

Módulo 1 Lista 4 1.º/2015

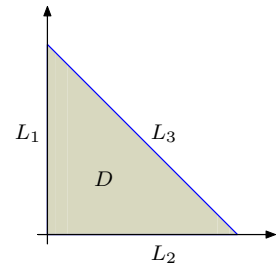
Atenção: na questão 1, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta no espaço ao lado do item e justificando a sua resposta.

1) Os alelos A , B e O determinam os tipos sanguíneos A (AA ou AO), B (BB ou BO), O (OO) e AB . Segundo a lei de Hardy-Weinberg, se x , y e z são as proporções dos alelos A , B e O em uma determinada população, então a proporção P de indivíduos da população que possuem dois alelos distintos é dada por

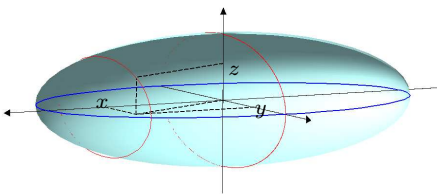
$$P = 2(xy + xz + yz).$$

Observe que, como $x + y + z = 1$, tanto z como P podem ser expressos como funções $z = z(x, y)$ e $P = P(x, y)$ das variáveis x e y . A figura ilustra o domínio D da função P e os segmentos L_1 , L_2 e L_3 de modo que $\partial D = L_1 \cup L_2 \cup L_3$.

- C E a) O domínio D intercepta a região $x + y > 1$.
- C E b) O valor máximo de P sobre o segmento L_3 é $1/2$.
- C E c) O valor máximo de P sobre o bordo ∂D é $3/2$.
- C E d) A função P possui dois pontos críticos interiores ao domínio D .
- C E e) As proporções dos alelos A , B e O que maximizam a proporção P de indivíduos com dois alelos distintos são $x = 1/3$, $y = 1/3$ e $z = 1/3$.



2) Considere o problema de determinar o paralelepípedo de maior volume que pode ser inscrito no elipsoide \mathcal{E} de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, onde a , b e c são constantes positivas. Para isso, considere o domínio plano $D = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.



- a) Para cada $(x, y) \in D$, determine $z = z(x, y) \geq 0$ de forma que o paralelepípedo retângulo de lados $2x$, $2y$ e $2z$ esteja inscrito no elipsoide \mathcal{E} .

Resposta:

- b) Defina agora a função $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ que fornece o volume do paralelepípedo acima.

Resposta:

- c) Justifique a afirmação de que o máximo de V é assumido no interior de D , e portanto é um ponto crítico.

Resposta:

- d) Calcule os pontos críticos de V .

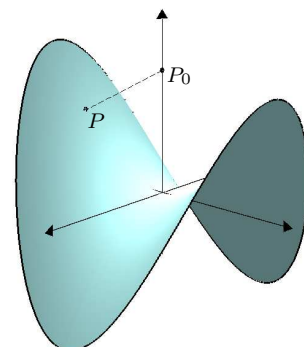
Resposta:

- e) Usando os itens anteriores, determine os lados do paralelepípedo de maior volume que pode ser inscrito no elipsoide, justificando a sua resposta.

Resposta:

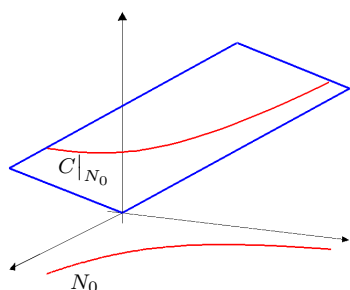
3) Sejam $P_0 = (0, 0, 1)$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x, y) = y^2 - 3x^2$ e $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ a superfície correspondente ao gráfico de f , conforme ilustra a figura abaixo. A distância de P_0 a \mathbb{S} é definida como o mínimo das distâncias de P_0 a um ponto genérico $P \in \mathbb{S}$.

- Determine a função $d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que fornece o quadrado da distância de P_0 a um ponto genérico $P = (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{S}$.
- Justifique a afirmação de que a função d não possui ponto de máximo absoluto.
- Calcule os pontos críticos da função d .
- Pode-se mostrar que a função d possui um ponto de mínimo absoluto. Use essa informação para determine a distância de P_0 à superfície \mathbb{S} .



- Verifique que, se (x_1, y_1) é um ponto crítico de d e $P_1 = (x_1, y_1, f(x_1, y_1))$ é o ponto correspondente de \mathbb{S} , então o segmento $P_0 P_1$ é ortogonal a \mathbb{S} no ponto P_1 .

4) Considere a função de Cobb-Douglas $P(x, y) = Kx^{1/5}y^{4/5}$, em que $K > 0$, x é o número de unidades de capital e y o é número de unidades de trabalho empregadas na produção $P(x, y)$ de um determinado bem. Considere ainda que o custo de produção é dado pela função $C(x, y) = 5x + 10y$. Com essa notação, um problema interessante é determinar o custo mínimo de produção de uma quantidade fixa de bens $P(x, y) = P_0$. Indicando por N_0 a curva de nível $P(x, y) = P_0$, esse problema corresponde a minimizar a restrição $C|_{N_0}$. A figura abaixo ilustra a curva de nível N_0 juntamente com o gráfico da restrição $C|_{N_0}$.



- Calcule os gradientes $\nabla P(x, y)$ e $\nabla C(x, y)$.
- Descreva os pontos críticos de $C|_{N_0}$ como as soluções de um sistema envolvendo os multiplicadores de Lagrange.
- Suponha $P_0 = 2K$ e calcule os pontos críticos de $C|_{N_0}$.
- Justifique a afirmação de que $C|_{N_0}$ não possui ponto de máximo absoluto.
- Use agora os itens anteriores e a informação de que existe um ponto de mínimo de $C|_{N_0}$ para determinar qual é esse ponto e qual é o valor mínimo correspondente.