Cálculo III

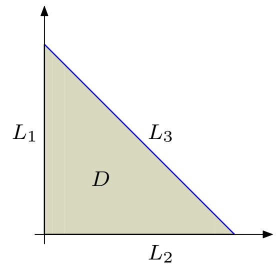
Módulo 1 – Gabaritos – Lista 4 1.º/2015

Atenção: na questão 1, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta no espaço ao lado do item e justificando a sua resposta.

1) Os alelos A, B e O determinam os tipos sangüineos A (AA ou AO), B (BB ou BO), O (OO) e AB. Segundo a lei de Hardy-Weinberg, se x, y e z são as proporções dos alelos A, B e O em uma determinada população, então a proporção P de indivíduos da população que possuem dois alelos distintos é dada por

$$P = 2(xy + xz + yz).$$

Observe que, como $x + y + z = 1$, tanto z como P podem ser expressos como funções $z = z(x, y)$ e $P = P(x, y)$ das variáveis x e y. A figura ilustra o domínio D da função P e os segmentos L_1, L_2 e L_3 de modo que $\partial D = L_1 \cup L_2 \cup L_3$.



C E a) O domínio D intercepta a região $x + y > 1$.

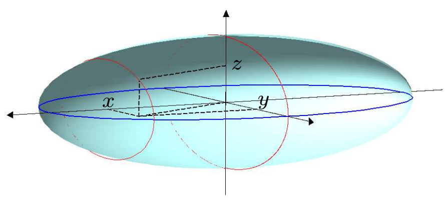
C E b) O valor máximo de P sobre o segmento L_3 é $1/2$.

C E c) O valor máximo de P sobre o bordo ∂D é $3/2$.

C E d) A função P possui dois pontos críticos interiores ao domínio D.

C E e) As proporções dos alelos A, B e O que maximizam a proporção P de indivíduos com dois alelos distintos são $x = 1/3$, $y = 1/3$ e $z = 1/3$.

2) Considere o problema de determinar o paralelepípedo de maior volume que pode ser inscrito no elipsoide $\mathcal{E}$ de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, onde a, b e c são constantes positivas. Para isso, considere o domínio plano $D = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.



a) Para cada $(x, y) \in D$, determine $z = z(x, y) \geq 0$ de forma que o paralelepípedo retângulo de lados $2x$, $2y$ e $2z$ esteja inscrito no elipsóide $\mathcal{E}$.

Resposta: $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

b) Defina agora a função $V : D \to \mathbb{R}$ que fornece o volume do paralelepípedo acima.

Resposta: $V(x, y) = 8cxy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

c) Justifique a afirmação de que o máximo de V é assumido no interior de D, e portanto é um ponto crítico.

Resposta: $V(x, y) \geq 0$ e V se anula sobre o bordo ∂D

d) Calcule os pontos críticos de V.

Resposta: o único ponto crítico é $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}})$

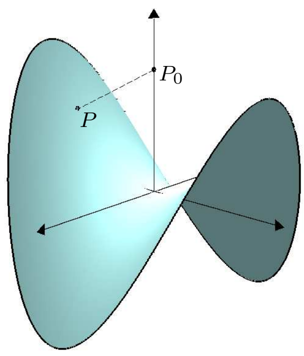
e) Usando os itens anteriores, determine os lados do paralelepípedo de maior volume que pode ser inscrito no elipsoide, justificando a sua resposta.

Resposta: único ponto crítico $\Rightarrow$ ponto de máximo; os lados são $\frac{a}{\sqrt{3}}$, $\frac{b}{\sqrt{3}}$ e $\frac{c}{\sqrt{3}}$

3) Sejam $P_0 = (0,0,1)$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x,y) = y^2 - 3x^2$ e $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ a superfície correspondente ao gráfico de f, conforme ilustra a figura abaixo. A distância de P_0 a $\mathbb{S}$ é definida como o mínimo das distâncias de P_0 a um ponto genérico $P \in \mathbb{S}$.

a) Determine a função $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que fornece o quadrado da distância de P_0 a um ponto genérico $P = (x, y, f(x,y)) \in \mathbb{S}$.

Resposta: $d(x,y) = x^2 + y^2 + (y^2 - 3x^2 - 1)^2$



b) Justifique a afirmação de que a função d não possui ponto de máximo absoluto.

Resposta: $d(x,y) \geq x^2 + y^2$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

c) Calcule os pontos críticos da função d.

Resposta: $(0,0)$, $(0, \sqrt{2}/2)$ e $(0, -\sqrt{2}/2)$

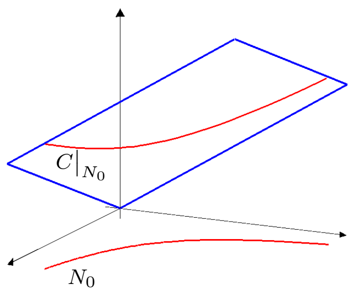
d) Pode-se mostrar que a função d possui um ponto de mínimo absoluto. Use essa informação para determine a distância de P_0 à superfície $\mathbb{S}$.

Resposta: distância $= \sqrt{3}/2$

e) Verifique que, se (x_1, y_1) é um ponto crítico de d e $P_1 = (x_1, y_1, f(x_1, y_1))$ é o ponto correspondente de $\mathbb{S}$, então o segmento $P_0\,P_1$ é ortogonal a $\mathbb{S}$ no ponto P_1.

Resposta: $P_1 - P_0 = -(y_1^2 - 3x_1^2 - 1)(-6x_1, 2y_1, -1)$ é um múltiplo de $(f_x(x_1,y_1), f_y(x_1,y_1), -1)$

4) Considere a função de Cobb-Douglas $P(x,y) = Kx^{1/5}y^{4/5}$, em que $K > 0$, x é o número de unidades de capital e y o é número de unidades de trabalho empregadas na produção $P(x,y)$ de um determinado bem. Considere ainda que o custo de produção é dado pela função $C(x,y) = 5x + 10y$. Com essa notação, um problema interessante é determinar o custo mínimo de produção de uma quantidade fixa de bens $P(x,y) = P_0$. Indicando por N_0 a curva de nível $P(x,y) = P_0$, esse problema corresponde a minimizar a restrição $C\big|_{N_0}$. A figura abaixo ilustra a curva de nível N_0 juntamente com o gráfico da restrição $C\big|_{N_0}$.



a) Calcule os gradientes $\nabla P(x,y)$ e $\nabla C(x,y)$.

Resposta: $\nabla P(x,y) = \left(\frac{P(x,y)}{5x}, \frac{4P(x,y)}{5y}\right)$ e $\nabla C(x,y) = (5, 10)$

b) Descreva os pontos críticos de $C\big|_{N_0}$ como as soluções de um sistema envolvendo os multiplicadores de Lagrange.

Resposta: $\nabla C(x,y) = \lambda \nabla P(x,y)$, $P(x,y) = P_0$

c) Suponha $P_0 = 2\,K$ e calcule os pontos críticos de $C\big|_{N_0}$.

Resposta: o único ponto crítico é $(x,y) = (2^{1/5}, 2^{6/5})$

d) Justifique a afirmação de que $C\big|_{N_0}$ não possui ponto de máximo absoluto.

Resposta: pode-se ter $(x,y) \in N_0$ com $x \to \infty$ e, nesse caso, $C(x,y) = 5x + 10y \to \infty$

e) Use agora os itens anteriores e a informação de que existe um ponto de mínimo de $C\big|_{N_0}$ para determinar qual é esse ponto e qual é o valor mínimo correspondente.

Resposta: o ponto é $(x,y) = (2^{1/5}, 2^{6/5})$ com $C(x,y) = 25 \times 2^{1/5}$